Anwendungen der K-Theorie von C*-Algebren: AF-Algebren und die irrationale Rotationsalgebra

PD Dr. Alexander Alldridge
Universität zu Köln

VL C*-Algebren und K-Theorie, WS 2016/7
Köln, 8.2.2017

Inhalte des Vortrags

- Geordnete Gruppen, Ordnungsstruktur auf K_0
- K_0 als vollständige Invariante für AF-Algebren
- AF-Einbettung der irrationalen Rotationsalgebra
- Nicht-Isomorphie irrationaler Rotationalgebren

Inhalte des Vortrags

- Geordnete Gruppen, Ordnungsstruktur auf K_0
- K_0 als vollständige Invariante für AF-Algebren
- AF-Einbettung der irrationalen Rotationsalgebra
- Nicht-Isomorphie irrationaler Rotationalgebren

Geordnete Gruppen verallgemeinern das Paar (**Z**,**N**) der ganzen und natürlichen Zahlen.

Eine *geordnete Gruppe* (G, G_+) besteht aus

1. einer abelschen Gruppe G und
2. einem Untermonoid G_+ ("positiver Kegel"):

$$G_+ - G_+ = G \quad \text{(massiv)}$$

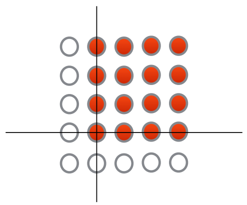
$$G_+ \cap (-G_+) = 0 \quad \text{(spitz)}$$

Dies definiert wie folgt eine Ordnung auf *G*:

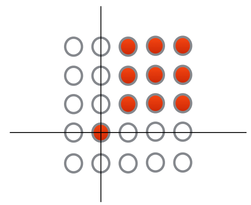
$$x \geqslant y :\Longrightarrow x - y \in G_+$$

Beispiele für geordnete Gruppen:

gewöhnliche Ordnung auf $\mathbf{Z}^n$



strikte Ordnung auf $\mathbf{Z}^n$



Skalen sind Größenmaßstäbe in geordneten Gruppen.

Eine Teilmenge Σ von G_+ heißt *Skale*, falls

$$0 \leqslant g \leqslant s, s \in \Sigma \Longrightarrow g \in \Sigma \qquad \text{(erblich)}$$

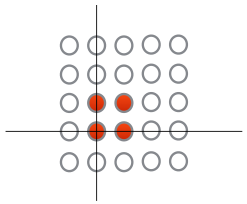
$$s_1, s_2 \in \Sigma \Longrightarrow \exists s \in S : s_1, s_2 \leqslant s \qquad \text{(gerichtet)}$$

$$g \in G \Longrightarrow \exists s_1, \ldots, s_n \in \Sigma : g = s_1 + \cdots + s_n \qquad \text{(erzeugend)}$$

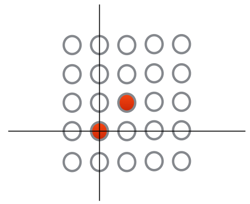
Ist e eine *Ordnungseinheit* in G, d.h. $\quad e \geqslant 0, \forall g \in G : \exists n \in \mathbb{N} : g \leqslant ne$

so ist wie folgt eine Skale definiert: $\quad \Sigma := [0, e] := \left\{ g \in G \;\middle|\; 0 \leqslant g \leqslant e \right\}$

Beispiele von Skalen: $[0,1]^n \subseteq \mathbb{Z}^n$



$\{0\} \cup (0,1]^n \subseteq \mathbb{Z}^n$



Es gibt auf K_0 natürliche Kandidaten für eine Ordnung und eine Skale, aber diese definieren nicht immer solche Strukturen.

Für eine C*-Algebra A definieren wir

$$K_0(A)_+ := \mathrm{im}(V(A) \longrightarrow K_0(A)), \quad \Sigma(A) := \mathrm{im}(\mathrm{Proj}(A) \longrightarrow K_0(A))$$

Für unitales A ist die Skale natürlich, nämlich: $\Sigma(A) = [0, [1_A]]$

Ist A stabil unital, so ist $K_0(A)_+$ massiv. Im allgemeinen gilt dies nicht:

$$K_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2))_+ = 0, \quad K_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

Im allgemeinen ist $K_0(A)_+$ auch nicht spitz:

$$\mathcal{O}_n := C^*\left\langle s_1, \ldots, s_n \;\middle|\; \forall i : s_i^* s_i = 1, \textstyle\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1 \right\rangle$$ (Cuntz-Algebra)

$$K_0(\mathcal{O}_{n+1}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \Sigma(\mathcal{O}_{n+1}) = K_0(\mathcal{O}_{n+1})_+ = K_0(\mathcal{O}_{n+1})$$

Die Kandidaten für eine Ordnung und eine Skale auf K_0 funktionieren gut, falls A stabil endlich ist.

Eine C*-Algebra A heißt *stabil endlich*, falls jede Matrixalgebra $M_n(A)$ endlich ist, und *endlich*, falls folgendes gilt:

$$\forall p,q \in \mathrm{Proj}(A) : p \leqslant q, p \sim q \Longrightarrow p = q$$

Eine unitale C*-Algebra ist genau dann endlich, wenn jede Isometrie unitär ist. Insbesondere ist jede endlich-dimensionale C*-Algebra stabil endlich. Es gilt auch, dass jede AF-Algebra stabil endlich ist.

Proposition. Ist A unital und stabil endlich, so ist $(K_0(A), K_0(A)_+)$ eine geordnete Gruppe.

Inhalte des Vortrags

- Geordnete Gruppen, Ordnungsstruktur auf K_0
- K_0 als vollständige Invariante für AF-Algebren
- AF-Einbettung der irrationalen Rotationsalgebra
- Nicht-Isomorphie irrationaler Rotationalgebren

Wiederholung: Endlich-dimensionale C*-Algebren und deren Morphismen sind vollständig beschrieben durch Dimensionsvektoren und Matrizen partieller Vielfachheiten.

Eine endlich-dimensionale C*-Algebra ist bis auf Isomorphie bestimmt durch ihren Dimensionsvektor $m^{(l)}$:

$$A_\ell = \bigoplus_{j=1}^{k_\ell} M_{m_j^{(\ell)}}(\mathbb{C})$$

Unitale *-Morphismen solcher C*-Algebren sind bestimmt durch ihre Matrix partieller Vielfachheiten:

$$A^{(\ell)} = (a_{ij}^{\ell})_{1\leqslant i\leqslant k_{\ell+1}, 1\leqslant j\leqslant k_\ell}$$

$$\phi^{(\ell)} : A_\ell \longrightarrow A_{\ell+1}, \quad \phi_j^{(\ell)} \cong a_{j1}\mathrm{id}_{m_1^{(\ell)}} \oplus \cdots a_{jk}\mathrm{id}_{m_k^{(\ell)}}$$

$$A^{(\ell)} m^{(\ell)} = m^{(\ell+1)}$$

Dabei ist $A^{(l)}$ eine beliebige Matrix mit natürlichzahligen Einträgen.

K_0 ist auf endlich-dimensionalen C*-Algebren und deren Morphismen ist durch die gleichen Daten beschrieben.

Die skalierte Gruppe K_0 ist auf A_l durch den Dimensionsvektor bestimmt:

$$\left(K_0(A^{(\ell)}), K_0(A^{(\ell)})_+, \Sigma(A^{\ell})\right) = \left(\mathbb{Z}^{k_\ell}, \mathbb{N}^{k_\ell}, [0, m^{(\ell)}]\right) \qquad \text{(“Dimensionsgruppe”)}$$

In der Standardbasis ist gilt für den induzierten Morphismus: $\phi_* = A^{(\ell)}$

Proposition.

1. Ein kontrahierender positiver Morphismus zwischen K_0-Gruppen e.d. C*-Algebren ist dasselbe wie eine Matrix partieller Vielfachheiten.
2. Jeder solcher Morphismus ist von einem *-Morphismus induziert.
3. Jeder *-Morphismus e.d. C*-Algebren ist bis auf unitäre Äquivalenz bestimmt durch seine Wirkung auf K_0.

Die Dimensionsgruppe ist eine vollständige Invariante für die Isomorphie von AF-Algebren.

Die skalierte K_0-Gruppe ist der induktive Limes skalierter Gruppen:

$$A = \varinjlim_{\ell} A_\ell \implies K_0(A) = \varinjlim_{\ell} K_0(A_\ell)$$

Theorem [Elliott 1978]. Seien A und B AF-Algebren. Jeder Isomorphismus

$$K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$$

skalierter Gruppen ist durch einen *-Isomorphismus von A und B induziert.

Korollar. Genau dann sind zwei AF-Algebren isomorph, wenn dies für ihre Dimensionsgruppen der Fall ist.

Spuren und Einfachheit einer AF-Algebra lassen sich gut an ihrer Dimensionsgruppe ablesen.

Proposition. Genau dann ist eine AF-Algebra einfach, wenn jedes positive Element ihrer Dimensionsgruppe eine Ordnungseinheit ist.

Ein positiver Homomorphismus von der Dimensionsgruppe in die reellen Zahlen heißt ein *Zustand*, falls

$$\phi(\Sigma(A)) = \phi(K_0(A)_+) \cap [0,1]$$

Proposition. Spuren auf einer AF-Algebra und Zustände auf ihrer Dimensionsgruppe sind in Bijektion vermöge

$$\tau \longmapsto (\tau_* : [p] \longmapsto \tau(p))$$

Inhalte des Vortrags

- Geordnete Gruppen, Ordnungsstruktur auf K_0
- K_0 als vollständige Invariante für AF-Algebren
- AF-Einbettung der irrationalen Rotationsalgebra
- Nicht-Isomorphie irrationaler Rotationalgebren

Die irrationale Rotationsalgebra besitzt Projektionen zu jedem möglichen Wert der Spur.

Die irrationale Rotationsalgebra wird erzeugt von zwei unitären Elementen:

$$A_\theta := \mathrm{C}^*\langle u, v \mid u^*u = uu^* = v^*v = vv^* = 1, uv = e^{2\pi i\theta} vu \rangle \quad (\theta \in (0,1) \setminus \mathbb{Q})$$

Sie ist einfach und besitzt eine eindeutige Spur, die zudem treu ist.

Theorem [Rieffel 1981]. Es gilt

$$\tau(\mathrm{Proj}(A_\theta)) \supseteq (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0,1]$$

Vermutung: Die Dimensionsgruppe der irrationalen Rotationsalgebra ist

$$(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}, (\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0,1])$$

Die Approximanten der Kettenbruchzerlegung des Rotationswinkels folgen einer zweistufigen linearen Rekursion.

Eine Kettenbruchentwicklung ist eine Folge rationaler Zahlen der Form

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$$

Die Kettenbruchzerlegung des Rotationswinkels folgt folgender Gleichung:

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$$

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1$$

Mithilfe der Kettenbruchzerlegung konstruiert man eine AF-Algebra mit der vermuteten Dimensionsgruppe.

Die Folge der Nenner definiert eine AF-Algebra:

$$B_\theta = \varinjlim_n B_n, \quad B_n := M_{q_n}(\mathbb{C}) \oplus M_{q_{n-1}}(\mathbb{C}), \quad B^{(n-1)} := \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die Dimensionsgruppe

$$K_0(B_\theta) = \mathbb{Z}^2, \quad K_0(B_\theta)_+ = \bigcup_n (A^{(0)})^{-1} \cdots (A^{(n)})^{-1}(\mathbb{Z}^2_+) = \{(x,y) \mid \theta x + y \geqslant 0\}$$

$$\Sigma(B_\theta) = \{(x,y) \mid -\theta x + 1 - y \geqslant 0\}$$

Inhalte des Vortrags

- Geordnete Gruppen, Ordnungsstruktur auf K_0
- K_0 als vollständige Invariante für AF-Algebren
- AF-Einbettung der irrationalen Rotationsalgebra
- Nicht-Isomorphie irrationaler Rotationalgebren

Falls es einen *-Morphismus von der irrationalen Rotationsalgebra gibt, ist die eindeutige Spur eine Surjektion auf der Dimensionsgruppe.

Der folgende Zustand ist sogar ein Ordnungsisomorphismus:

$$\sigma_* : K_0(B_\theta) = \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} : (x, y) \longmapsto \theta x + y$$

Nach der allgemeinen Theorie ist dieser induziert von einer (eindeutigen) Spur.

Angenommen, es sei ein *-Morphismus wie folgt gegeben:

$$\varrho : A_\theta \longrightarrow B_\theta$$

Dieser ist automatisch injektiv, also folgt für die Spuren:

$$\tau = \sigma \circ \varrho \implies \tau_*(K_0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$$

Es gibt einen *-Morphismus von der irrationalen Rotationsalgebra.

Theorem [Pimsner-Voiculescu 1980]. Es gibt einen *-Morphismus

$$\varrho : A_\theta \longrightarrow B_\theta$$

Korollar. Es gilt

$$\theta \pm \theta' \notin \mathbb{Z} \implies A_\theta \ncong A_{\theta'}$$

Beweis. Aus den obigen Überlegungen folgt im Falle der Isomorphie

$$\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \theta'\mathbb{Z}$$

QED

Zusammenfassung

- Unter gewissen Endlichkeitsbedingungen ist K_0 geordnet.
- Insbesondere für AF-Algebren liefert dies viele Zusatzinformationen.
- Die Flexibilität von AF-Algebren erlaubt es, K_0 für andere Algebren zu “präparieren” und so neue Einsichten zu gewinnen, wie das Beispiel der irrationalen Rotationsalgebra zeigt.

Quellen

1. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, 2nd Edition, CUP, Cambridge, 1998
2. K.R. Davidson, *C*-Algebras by Example*, AMS, Providence, RI, 1991